

দ্বিঘাত আকার

৫২

৭৪) দ্বিঘাত আকার বলতে কী বুঝ?

⇒ যেকোনো অণুয্যক চলকের দ্বিতীয় স্রাচার সমসত্ত্ব বহুপদীকে দ্বিঘাত আকার বলে।

মনে করি, n অণুয্যক চলক x_1, x_2, \dots, x_n এর দ্বিঘাত আকার —

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= X'AX$$

যেখানে,

$$X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

দ্বিঘাত আকার

৫৬

দ্বিঘাত আকার চার প্রকার। যথা:

1. Positive definite (নিশ্চিত ধনাত্মক) ($x'Ax > 0$)
2. Positive Semi-definite (নিশ্চিত অর্ধ-ধনাত্মক) ($x'Ax \geq 0$)
3. Negative definite (নিশ্চিত ঋনাত্মক) ($x'Ax < 0$)
4. Negative Semi-definite (নিশ্চিত অর্ধঋনাত্মক) ($x'Ax \leq 0$)

২৭) যদি $x'Ax$ এবং $x'Bx$ x চলকের দুটি দ্বিঘাত আকার হয় এবং $x \sim N_p(0, I)$ তাহলে দেখাও যে, দ্বিঘাত আকার দুটি স্বাধীন হবে তার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত হলো $AB = 0$ । [২১, ১৪, ১৬, ১৩] ৫★

Solution:

৬১) বিবৃতি: যদি $x \sim N_p(0, I)$ তাহলে $Q_1 = x'Ax$ এবং $Q_2 = x'Bx$ পরস্পর স্বাধীন হবে তার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত হলো $AB = 0$

প্রমাণ:

পর্যাপ্ত শর্ত:

এখানে $x \sim N_p(0, I)$ । ধরি $AB = 0$ দেখাতে হবে যে,

$Q_1 = x'Ax$ এবং $Q_2 = x'Bx$ স্বাধীনভাবে বিন্যাস—

৫৬

৫) এখন $Q = X'AX$ এর mgf

$$M_{Q_1}(t) = E[e^{tQ_1}]$$

$$= E[e^{t(X'AX)}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(X'AX)} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(X'AX)} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |I|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} X'IX} dx$$

$$\because f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |I|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'I^{-1}(x-\mu)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(X'AX)} e^{-\frac{1}{2} X'IX} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} X'IX + t(X'AX)} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} X'(I - 2tA)X} dx$$

$$= |I - 2tA|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |I - 2tA|^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} X'(I - 2tA)X} dx$$

$$= |I - 2tA|^{-\frac{1}{2}} \times 1$$

$$= |I - 2tA|^{-\frac{1}{2}}$$

একইভাবে

$$(54) M_{Q_2}(t) = |I - 2tB|^{-\frac{1}{2}}$$

এখন Q_1 এবং Q_2 পরস্পর স্বাধীন হবে যদি -

$$(55) M_{Q_1+Q_2} = M_{Q_1}(t) \cdot M_{Q_2}(t) \text{ হয়।}$$

$$\begin{aligned} M_{Q_1+Q_2}(t) &= E \{ e^{t(Q_1+Q_2)} \} \\ &= E \{ e^{t(x'Ax + x'Bx)} \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x'Ax + x'Bx)} f(x) dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x'Ax + x'Bx)} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |I|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} x' I^{-1} x} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x' x + t(x'Ax + x'Bx)} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x' (I - 2At - 2Bt) x} dx$$

$$= |I - 2At - 2Bt|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |I - 2At - 2Bt|^{-1/2}} e^{-\frac{1}{2} x' (I - 2At - 2Bt) x} dx$$

৫৬

$$= |I - 2At - 2Bt|^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$$

$$= |I - 2At - 2Bt|^{-\frac{1}{2}} \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

এখন,

$$\textcircled{৫৬} M_{Q_1}(t) \cdot M_{Q_2}(t) = |I - 2At|^{-\frac{1}{2}} \cdot |I - 2Bt|^{-\frac{1}{2}}$$

$$= |(I - 2At)(I - 2Bt)|^{-\frac{1}{2}}$$

$$= |I - 2At - 2Bt + 4ABt^2|^{-\frac{1}{2}}$$

$$= |I - 2At - 2Bt|^{-\frac{1}{2}} \dots \dots \textcircled{11} \quad [\text{যদি } AB = 0 \text{ হয়}]$$

৩ ও ১১ হতে পাই -

$$M_{Q_1+Q_2}(t) = M_{Q_1}(t) \cdot M_{Q_2}(t)$$

অতএব Q_1 ও Q_2 -পরস্পর স্বাধীন,

প্রয়োজনীয়-কাজ:

মনে করি, Q_1 ও Q_2 -পরস্পর স্বাধীন,

দেখাতে হবে যে $AB = 0$

সেহেতু Q_1 ও Q_2 পরস্পর স্বাধীন। অতএব

(৬৪)

$$M_{Q_1+Q_2}(t) = M_{Q_1}(t) \cdot M_{Q_2}(t)$$

$$= |1 - 2At - 2Bt|^{-\frac{1}{2}} = |1 - 2At - 2Bt + 4ABt^2|^{-\frac{1}{2}}$$

এই সমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $AB = 0$ হয়।

৫৬

- (২৭) দিওয়াও হু, $X'AX$ একটি $n-1$ স্বাধীনতা স্রোত X^2 চলক। যেখানে $A = a_{ij}$, $a_{ii} = 1 - \frac{1}{n}$ এবং $a_{ij} = -\frac{1}{n}$; $i \neq j$
- Solution: $[20, 18, 16, 14]$ 5★

(২৮) মনে করি, $Q = X'AX$

$$= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- (২৯) $\therefore X \sim N(0, I)$ তাহলে $Q = X'AX$ k স্বাধীনতা স্রোত X^2 বিন্যাস হলে চলবে যদি A একটি k অংকের Idempotent Matrix হয়।

(৩০) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

- (৩১) এখন A^2 অ্যাড্রিক্স এ (i, i) তম উপাদান অর্থাৎ A^2 অ্যাড্রিক্স এর মুখ্য কোণিক উপাদানগুলো হবে —
- $$(1 - \frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$
- $$= \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \quad [(n-1) \text{ এর সাথে } \frac{1}{n^2}]$$

$$= \frac{n-1}{n^2} (n-1+1)$$

$$= \frac{n(n-1)}{n^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

৫৫) আবার (i, i) তম উপাদান..

$$= -\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$= -\frac{n-1}{n^2} - \frac{(n-1)}{n^2} + \frac{(n-2)}{n^2} \quad \text{***?}$$

$$= \frac{n-2}{n^2} - \frac{2(n-1)}{n^2}$$

$$= \frac{n-2-2n+2}{n^2}$$

$$= -\frac{n}{n^2}$$

$$= -\frac{1}{n}$$

৫৬) অতএব $A^2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = A$

অতএব A একটি Idempotent matrix।

- (৬৪) অতএব $X'AX$ কই বর্গ বিন্যাস মেনে চলবে।
সার্ব স্বাধীনতার মাত্রা —

$$\begin{aligned}\text{Rank}(A) &= \text{Tr}(A) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= n \cdot \frac{n-1}{n} \\ &= n-1\end{aligned}$$

- (৬৫) যদি $X \sim N_p(0, I_p)$ তাহলে দেখাও যে $Q = X'AX$ এর
mgf $M_Q(t) = |I - 2At|^{-\frac{1}{2}}$

Solution:

প্রমাণ: যেহেতু $X \sim N_p(0, I_p)$

অতএব,

$$\begin{aligned}(৬৬) f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |I_p|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (x-0)' I^{-1} (x-0)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\frac{1}{2} x'x}\end{aligned}$$

(৬৭) $\therefore Q$ এর mgf হবে —

$$\begin{aligned}M_Q(t) &= E[e^{Qt}] \\ &= E[e^{X'AXt}]\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{x'Ax t} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{x'Ax t} \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\frac{1}{2} x'x} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x'x + x'Ax t} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x'(I-2At)x} dx$$

$$= \frac{|I-2At|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{p/2} |I-2At|^{-\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x'(I-2At)x} dx$$

$$= |I-2At|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |I-2At|^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} x'(I-2At)x} dx$$

$$= |I-2At|^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$$

$$= |I-2At|^{-\frac{1}{2}}$$

১২

১২

দেখ x_1, x_2, x_3, x_4 চলকগুলো সুস্থভাবে পরিচিত বিন্যাস হলে
চলে আর দ্বিঘাত আকার

$$Q = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_4^2 + 2x_3x_4 - 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 6x_4 + 8$$

M এবং v নির্ণয় কর। [17, 15] 3*

Solution:

সুস্থতা আছে,

১৩

$$Q = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_4^2 + 2x_3x_4 - 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 6x_4 + 8$$

আমরা জানি,

গড় বেকের M হলো $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ সমীকরণজোটের সমাধান।

১৪

$$\text{অর্থাৎ } \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 4x_1 + 0 + 0 + 2x_2 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 - 0 + 0$$

$$\Rightarrow 4x_1 + 2x_2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \text{ ----- (i)}$$

১৫

$$\frac{\partial Q}{\partial x_2} = 0 + 6x_2 + 0 + 2x_1 + 0 + 0 - 0 - 6 - 0 - 0 + 0$$

$$\Rightarrow 6x_2 + 2x_1 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 3x_2 + x_1 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + 3x_2 - 3 = 0 \text{ ----- (ii)}$$

১৬

$$\frac{\partial Q}{\partial x_3} = 0 + 0 + 2x_3 + 0 + 0 + 2x_4 - 0 - 0 - 2 - 0 + 0$$

$$= 2x_3 + 2x_4 - 2 = 0$$

$$= x_3 + x_4 - 1 = 0 \text{ ----- (iii)}$$

$$(55) \frac{\partial Q}{\partial x_4} = 0 + 0 + 0 + 0 - 4x_4 + 2x_3 - 0 - 0 - 0 - 6 + 0$$

$$\Rightarrow 4x_4 + 2x_3 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_3 + 2x_4 - 3 = 0 \text{ ----- (IV)}$$

(56) ① ও ① বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পার্শ্ব -

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{3} & \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ 2x_1 + x_2 - 1 = 0 & \text{---} & \textcircled{1} \end{array}$$

$$x_1 + 3x_2 - 3 = 0 \text{ --- (II)}$$

$$\frac{x_1}{-3+3} = \frac{x_2}{-1+6} = \frac{1}{6-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{0} = \frac{x_2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{0} = \frac{1}{5} \quad \text{অথবা,} \quad \frac{x_2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow 5x_2 = 5$$

$$\therefore x_2 = 1$$

① ও ① নং বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পার্শ্ব -

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{3} & \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ x_3 + x_4 - 1 = 0 & \text{---} & \textcircled{III} \end{array}$$

$$x_3 + 2x_4 - 3 = 0 \text{ --- (IV)}$$

$$\frac{x_3}{-3+2} = \frac{x_4}{-1+3} = \frac{1}{2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x_3}{-1} = \frac{x_4}{2} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x_3}{-1} = 1 \quad \text{অথবা,} \quad \frac{x_4}{2} = 1$$

$$\therefore x_3 = -1$$

$$\therefore x_4 = 2$$

১৭) অতঃপর গড় ভেক্টর $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

১৮) আবার, $x'V^{-1}x = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_4^2 + 2x_3x_4$

$$= (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

১৯) $\therefore V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\textcircled{S10} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}; \text{ অত্যাণ্ডে } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{এবং, } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{S11} \therefore A = (A^{-1})^{-1} = \frac{\text{Adj } A^{-1}}{|A^{-1}|} = \frac{1}{6-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{এবং, } B = (B^{-1})^{-1} = \frac{\text{Adj } B^{-1}}{|B^{-1}|} = \frac{1}{2-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{S12} \therefore V = (V^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Principle component Analysis)

৩৬

ক) প্রধান উপাদান বিশ্লেষণ বলতে কী বুঝে?

কি

→ প্রধান উপাদান বিশ্লেষণ হলো একটি পরিসংখ্যানিক পদ্ধতি যেখানে অনেকগুলো চলকের মধ্যে লুকায়িত গঠন, অঙ্গর ও আধারণ factor খুঁজে বের করা হয়।

উদ্দেশ্য:

১) অনেকগুলো চলককে কয়েকটি প্রধান উপাদানে সংক্ষেপ করা।

২) কোন চলকগুলো একই অন্তর্নিহিত ধারণা নির্দেশ করে তা বের করা।

৩) বিভিন্ন গবেষণায় স্কেল তৈরি করতে সাহায্য করে।

৪) কোন কোন চলকের সাথে অঙ্গর Strongest তাই জানা যায়।

ক) প্রধান - উপাদানের ধর্ম:

১) i - ভিন্ন প্রধান উপাদানের ভেদাংক ১।

২) প্রধান উপাদানগুলো পরস্পর অসংশ্লিষ্ট, অতঃপর $Cov=0$

৩) প্রধান উপাদানগুলো বৈশিষ্ট্য রূপান্তরের অপরিবর্তিত নয়

৪) স্বল্প চলকগুলোর ভেদাংকের অধিক প্রধান উপাদানগুলোর ভেদাংকের অধিক অমান।

৫) প্রধান উপাদানগুলো স্বল্প চলকগুলোর সাথে অংশীদারিত্ব।

৬ প্রথম প্রধান উপাদান v_1 অর্ধোচ্চ ডেডাংক হিসাব করে, দ্বিতীয় প্রধান উপাদান v_2 দ্বিতীয় অর্ধোচ্চ উপাদান হিসাব করে এবং; -----

৩২) $L'(x) = 0$ এবং $V(x) = \Sigma$ অন্বলিত P উপাদান বিশিষ্ট x ভেক্টরের প্রথম ২টি প্রধান উপাদান বের কর।

সমাঃ $[20, 18, 16, 14]$ ৫★

৩১) জানে করি,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$ একটি P উপাদান বিশিষ্ট দৈব

ভেক্টর যার $E(x) = 0$ এবং $E(xx') = V(x) = \Sigma$

x এর c তম প্রধান উপাদান হলো $\alpha'x$ এর আদর্শায়িত ঐকমিক Combination.

৩২) যেখানে, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$

$$\therefore V(\alpha'x) = \text{Max } V(L'x) \text{ ----- ①}$$

৩৩) এখন $V(L'x) = L'V(x)L = L'\Sigma L$

$\therefore c$ তম প্রধান উপাদান $\alpha'x$ পেতে α এর মান বের করা প্রয়োজন যা $L'\Sigma L$ কে অর্ধোচ্চকরণ করে; অর্থাৎ যে $L'L = 1$ ।

৩৪) Lagrangian multiplier λ ব্যবহার করে আমরা α নির্ণয় করব যা $Q_1(L)$ কে অর্ধোচ্চকরণ করবে।

২০

$$Q_1(L) = L' \Sigma L - \lambda (L' L - I) \text{ ----- (II)}$$

$$\therefore \frac{\partial Q_1}{\partial L} = 2 \Sigma L - 2 \lambda L$$

(৬) অধিকারকৃত α অবশ্যই নিম্নের শর্ত প্রতিপালন করবে -

$$2 \Sigma \alpha - 2 \lambda \alpha = 0$$

$$\Rightarrow (\Sigma - \lambda I) \alpha = 0 \text{ ----- (III)}$$

$$\therefore \alpha \neq 0$$

$$\therefore |\Sigma - \lambda I| = 0 \text{ ----- (IV)}$$

(৬) অর্থাৎ λ হলো Σ এর বৈশিষ্ট্যমূল এবং α হলো তার অন্তর্লিপিত বৈশিষ্ট্য ভেক্টর। যেহেতু Σ এর অংশগণনা হলো $P \times P$ ।

অতএব λ এর p অন্তরক জ্ঞান পাওয়া যাবে যা

(iv) নং, অধিকারকৃত সিদ্ধ করবে -

(৬) জানে করি, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ Σ এর অন্তর্লিপিত বৈশিষ্ট্য ভেক্টর -

$$\Sigma \alpha = \lambda \alpha$$

$$\text{এখানে } \alpha' \Sigma \alpha = \lambda \alpha' \alpha$$

$$= \lambda \quad [\because \alpha' \alpha = 1]$$

$$\therefore v(\alpha' x) = \alpha' \Sigma \alpha = \lambda$$

অতএব x এর প্রথম প্রধান উপাদান $z = \alpha_1' x$; $\alpha_1' \alpha_1 = 1$

একইভাবে x -এর দ্বিতীয় প্রধান উপাদান-

$$z_2 = \alpha_2' x ; \alpha_2' \alpha_2 = 1$$

৩৩) দি: X - এর সহস্রাতীক ম্যাট্রিক্স

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ হলে } X \text{ এর প্রধান উপাদানগুলো বের কর।}$$

Solution:

৩৪) V এর বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক হবে -

$$|V - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda) \left\{ (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (1-\lambda) - \frac{1}{4} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} (1-\lambda) \right\} = 0$$

৩৫)

$$\Rightarrow (1-\lambda) \left\{ 1-2\lambda+\lambda^2-\frac{1}{4} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2} \right\} =$$

$$\Rightarrow (1-\lambda) \left(-\frac{3}{4}-2\lambda+\lambda^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}-2\lambda+\lambda^2-\frac{3\lambda}{4}+2\lambda^2-\lambda^3-\frac{1}{8}+\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{4}-\frac{1}{8}=0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+3\lambda^2-\frac{9\lambda}{4}+\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow -4\lambda^3+12\lambda^2-9\lambda+2=0 \quad [\text{এ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\Rightarrow 4\lambda^3-12\lambda^2+9\lambda-2=0$$

$$\Rightarrow 4\lambda^3+9\lambda-12\lambda^2-2=0$$

$$\Rightarrow 4\lambda^3-8\lambda^2-4\lambda^2+8\lambda+\lambda-2=0$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2(\lambda-2)-4\lambda(\lambda-2)+1(\lambda-2)=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(4\lambda^2-4\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(2\lambda-1)^2=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(2\lambda-1)(2\lambda-1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\text{অতএব, } \lambda_1=2, \lambda_2=\frac{1}{2}, \lambda_3=\frac{1}{2}$$

Q5) $\lambda_1 = 2$ এর জন্য -

$$(V - \lambda I) X = 0$$

$$\Rightarrow (V - 2I) X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 0$$

$$\frac{x_1}{2} - x_2 + \frac{x_3}{2} = 0$$

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - x_3 = 0$$

অতঃপর,

Q6)

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -3/4 & 3/4 \\ 0 & 3/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2' = \frac{1}{2} r_1 + r_2 \\ r_3' = \frac{1}{2} r_1 + r_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \pi'_3 = \pi_2 + \pi_3$$

$$\therefore -x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} = 0$$

$$- \frac{3x_2}{4} + \frac{3x_3}{4} = 0$$

ধরি, $x_3 = 1$

$$\therefore x_2 = 1$$

$$\therefore x_1 = 1$$

$$\therefore \text{স্বাধীন ভেক্টর } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

আবার, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ এর জন্য

$$|V - \frac{1}{2}I| x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

২

$$\Rightarrow \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 0$$

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 0$$

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 0$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

অথবা, $x_1 = 1$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = -3$$

স্বৈশিষ্ট্যভেক্টর $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

সুস্বাক্ষর আবার $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ এর জন্য

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

অথবা, $x_3 = 1$

$$\therefore x_1 = 2$$

$$\therefore x_2 = -3$$

\therefore স্বৈশিষ্ট্যভেক্টর $x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$L_1 = \frac{X_1}{\sqrt{X_1' X_1}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+1}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \frac{X_2}{\sqrt{X_2' X_2}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+4+9}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \frac{X_3}{\sqrt{X_3' X_3}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+9+1}} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

প্রথম প্রধান উপাদান

$$Y_1 = L_1' X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{3}}$$

দ্বিতীয় প্রধান উপাদান

$$Y_2 = L_2' X = \frac{1}{\sqrt{14}} \frac{2}{\sqrt{14}} \frac{-3}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{\sqrt{14}} + \frac{2x_2}{\sqrt{14}} - \frac{3x_3}{\sqrt{14}}$$

তৃতীয় প্রধান উপাদান

$$Y_3 = L'_3 X = \left(\frac{2}{\sqrt{14}} \quad \frac{-3}{\sqrt{14}} \quad \frac{1}{\sqrt{14}} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{2x_1}{\sqrt{14}} - \frac{3x_2}{\sqrt{14}} + \frac{x_3}{\sqrt{14}}$$